## 取後不放回之抽樣方法的估計方式

依據2.2.3節所示，在目標區塊中檢視到物種*i*所存在的區塊數，其分布應服從一個二項分佈；且第*i*物種出現的區塊數所組成的出現頻率向量，在給定 的情況下，應服從超幾何分佈。又與有關，來自於，因此可推導出：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中，*I(A)*為指標函數，表示若出現*A*情況時，則該式為1，反之則即為0。

Shen 和 He (2008) 針對取後不放回的抽樣方式，開發的Beta 二項式模型：假設為一來自Beta分佈的隨機樣本，故可將式子表示為：

其中。的邊際分佈可通過與 獲得，故樣本之物種出現頻率的邊際分佈如下，為樣本中的物種豐富度正好為的平均機率：

並令表示在個區塊中準確觀測到的物種數，而為在單群落樣本中出現個區塊數。並且Chiu (2023) 又基於Good-Turing頻率公式與柯西不等式之概念，針對單一群落的估計得出近似式：。從中可以得知，在物種估計時，採取出現較少次的物種，可以更多提供未出現物種的資訊，有助於縮小物種豐富度的估計結果。根據，可定義出為：

依據上述式子可知未觀測到、僅出現在一個與兩個區塊中的豐富度的期望值為：

將隨後利用上述概念，將估計推廣至兩群落。令為兩樣本的物種豐富度正好分別為和的平均機率：

隨後又令為在樣本中第一群落出現次且第二群即出現次的區塊數，則為樣本中觀測到的共同物種數量，。藉此，可獲得在第一群落中分別出現未觀測到以及一至二個區塊，且同時在第二群落中出現過至少一次的期望值：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |

依據式 (1) 與式 (2) 成立以下近似值。將 設定為1，且：

得 ，代入 。得：

表示：若時，則等於；若，則等於。

同理 也依此證明，得：

表示：若時，則等於；若，則等於。

同理，又可得在兩群群落同時為未觀測到、觀測到一至二個區塊的期望值分別為：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  | (5) |
|  | (6) |

並依據式 (4) 與式 (5) 成立以下近似值：

將，代入 後，並加入對估計式進行調整，最終得估計式：

其中：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |
|  | (8) |
|  | (9) |

表示：若時，則等於；若，則等於。

並在的基礎上，加入 對的估計進行修正，依據式(5)與式 (6) 成立以下近似值：

並經由該式可推得出：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

又經由可以得知，以及 分別為：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |
|  | (12) |

並依式 (11) 與式 (12) 成立以下近似式：

並由上述式子推得：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

又可從式 (10) = 式 (13) 得：

並依公式解，得：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

最終得：

其中，將式 (14) 的與 的結果分別帶入 與 中可分別求得 與 的估計式；而則與*wBB1*相同使用式 (9) 估計。